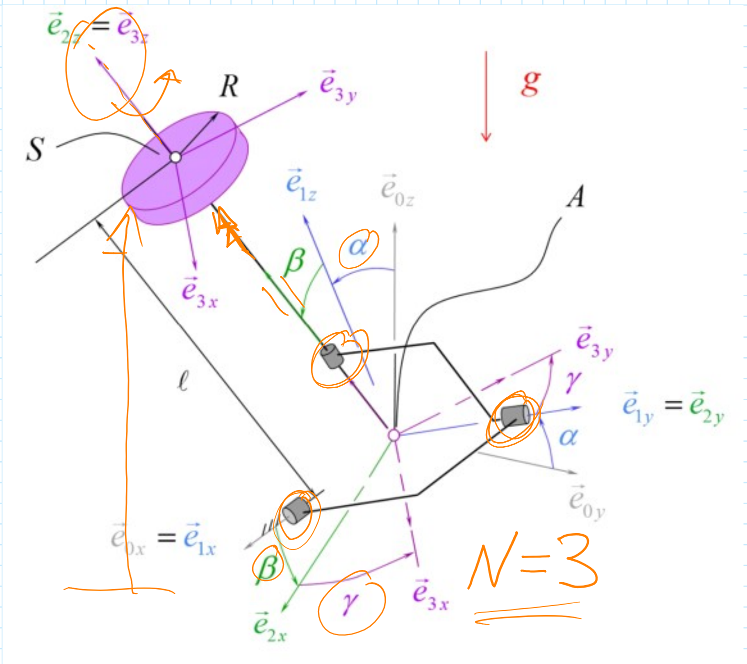
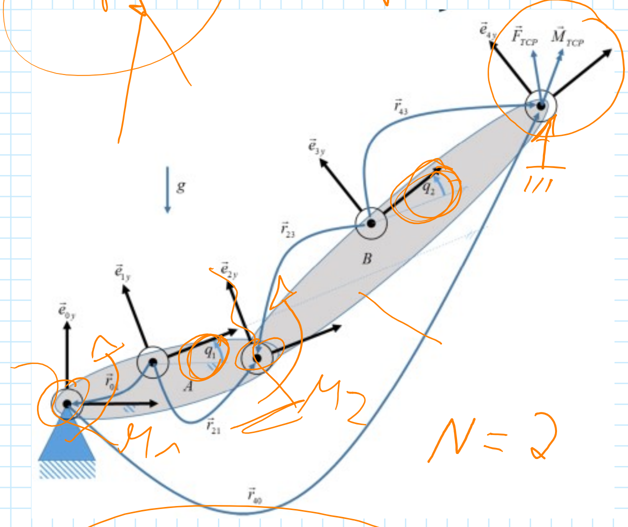
U11.1. und U11.4: Grundlagen der Analytischen Mechanik. Lagrangesche Gleichungen 2. Art

Quellen:
[Woe] = [7]
Woernle, C. *Mehrkörpersysteme*. Berlin : Springer, 2011.

Motivation und Grundbegriffe

12 Glg für Zwi.-Größen q_1, q_2
10 Glg für Zwangskräfte u. Mom.





$q_1(t), q_2(t)$

Herleitung d. Beweg.glg, ohne Freischnitt, ohne Betracht. der Zwangskräfte und -Momente.

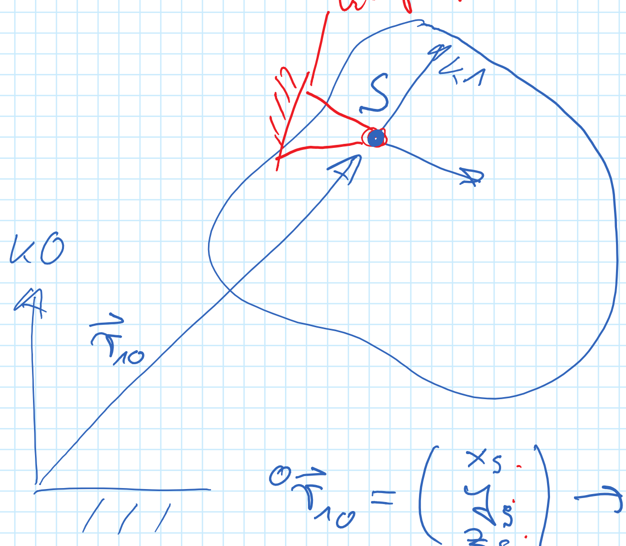
· Wieviele Beweg.glg. benötigt → $N \mathrel{\hat{=}}$ kinematische Freiheitsgrad

Freiheitsgrad: Anzahl d. unabh. Beweg.möglichkeit

– Grüblerformel

Generalisierte Koordinaten, Minimalkoordinaten

• Freier Starrkörper im 3D-Raum



$${}^{0}\vec{r}_{10} = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} \to \text{3 Skalare}$$

Starrkörper hat FHG $N=6$ $\Big\{$ Trafomatrix ${}^{10}\underline{T} \to$ z.B. mit 3 Kardanwinkeln

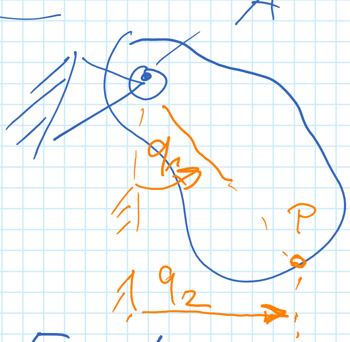
Grübler Formel $\quad n_K$ starre Körper

$$N = 6\, n_K - n_B$$

$\llcorner$ Anzahl d. unabh. Bindung

z.B. 1 Drehgelenk schränkt 5 Bew.mögl. ein

Bsp: Pendel



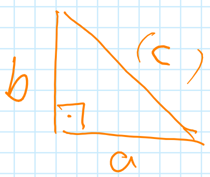
Drehgelenk schränkt 3 Translat. ein
2 Rotationen ein

$5 = n_B$

Anz.

$$N = 6\cdot 1 - 5 = 1$$

$q_1, q_2 \mathrel{\hat{=}}$ generalisierte Koordinaten



Es kann max. N unabh. Koord. geben

→ Minimalkoord.

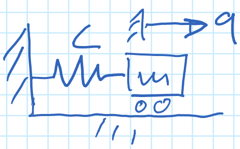
z.B. q_1

Satz v. Minimalkoord $q_1, q_2, \dots, q_N$

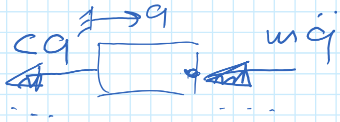
→ N Differenzialglg als Beweg.glg.

Lagrangesche Gleichungen 2. Art, zunächst nur Potenzialkräfte

Einmassenschwinger

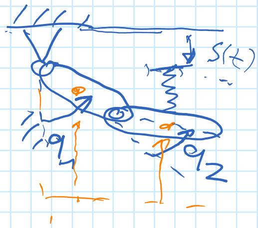


Klassisch: Freischnitt



Bilanz: $\boxed{0 = m\ddot{q} + cq}$

Lagr. Gleichung. 2. Art



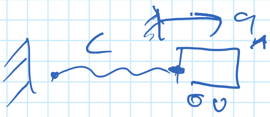
geg: • System mit FHG N

• Satz v. Minimalkoord $q_1, q_2, \ldots, q_N$

• Es wirken nur Potenzialkräfte (Federkräfte, Gravitation)

• Allg. Potenzial des Systems: $V(q_1, \ldots, q_N, t)$ liegt analytisch vor

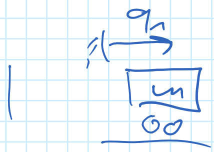
Bsp: EMS $V = \frac{1}{2} c q_1^2$



• Allg. kinetische Energie des Systems

$$T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, q_1, \ldots, q_N, t)$$

Bsp: EMS



$T(\dot{q}_1) = \frac{1}{2} m \dot{q}_1^2$

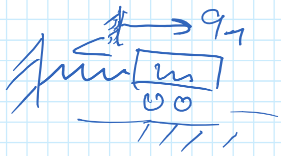
• Def: Lagrange-Funktion $\boxed{L(\dot{q}_i, q_i, t) = T(\dot{q}_i, q_i, t) - V(q_i, t)}$

• Beweg.glg (Anzahl N für $q_1, \ldots, q_N$)
(nur Potenzialkräfte)

Lagrangesche Glg!

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i=1,\dots,N}$$

↳ Beweg.gl. für mech. Syst.



Feder entsp. $q=0$

Bsp: EMS

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot q_1^2 - \frac{1}{2} c q_1^2$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_1}\right)^{\bullet} = \left(m \dot q_1\right)^{\bullet} = m \ddot q_1$$

$$f(x) = \frac{1}{2} m x^2$$

$$\left(\dot q_1\right)^{\bullet} = \ddot q_1$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q_1} = + c q_1$$

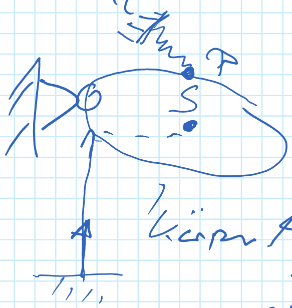
$$m \ddot q_1 + c q_1 = 0 \quad \to \text{Beweg. glg.}$$

· Lagrangefkt

$$L = T - V \quad \text{als Fkt } (\dot q_i, q_i, t)$$

T: kin. En., V: Pot. En.

$q_i \mathrel{\hat=}$ Minimalkoord



$$\vec v_k^{(S)} = f(q_i, \dot q_i, t)$$

$$\vec \omega_k = \dots$$

$$\to \vec r^{(S)} \to \vec v^{(S)} = \dot{\vec r}^{(S)}$$

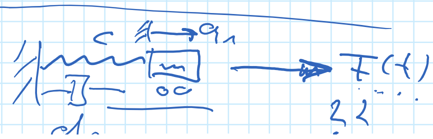
$$T = \sum_k \frac{1}{2} m_k \vec v_k^{(S)} \cdot \vec v_k^{(S)} + \frac{1}{2} \vec\omega_k \cdot \underline{\Phi}^{(S_k)} \cdot \vec \omega_k$$

$$\vec r^{(P)}$$

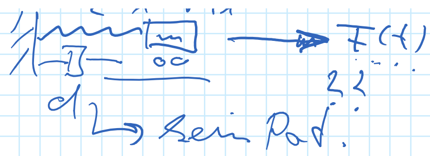
· Lagr. glgl

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)^{\bullet} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, \dots, N$$

→ N Beweg. glg



$\rightarrow N$ Beweg.glg



Erweiterung: Berücksicht. von eingeprägten Kräften, die nicht im Potenzial berücksichtigt sind (eup-Kräften)

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \;\hat{=}\; \text{generalisierte Kraft}$$

$$Q_1, \dots, Q_N$$

Wie findet man die Terme der generalisierten Kräfte

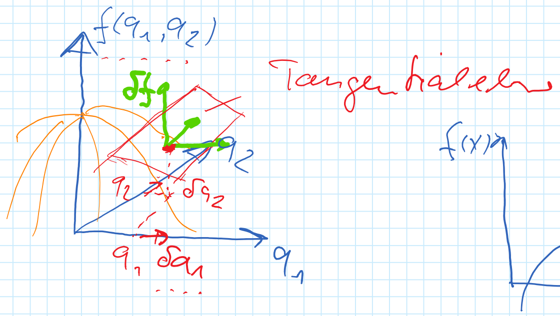
$Q_i = \dots$

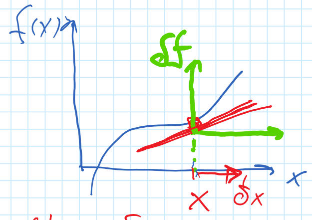
Generalisierte Kräfte. Mathematische Grundlagen:
Variation einer Funktion

Geg: $f(q_1,\dots,q_N,t)$ $\qquad f\in\mathbb{R}$ oder auch vektorwertig
z.B. Ortsvektor $\vec r(q_1,\dots,q_N,t)$

Def: Variation δf
↑ Variationsoperator

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_N}\delta q_N \quad \dots$$

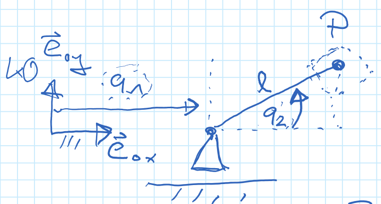




$$\delta f = f'(x)\,\delta x$$

Bsp:

$$\vec r_P(q_1,q_2) = q_1\vec e_{0x} + l\cos q_2\,\vec e_{0x} + l\sin q_2\,\vec e_{0y}$$



Ges: $\delta\vec r_P$?

$$\delta\vec r = \frac{\partial\vec r_P}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\vec r_P}{\partial q_2}\delta q_2$$

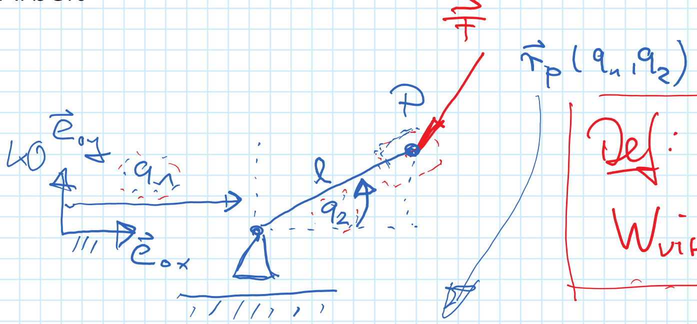
$$= \frac{\partial(q_1\vec e_{0x})}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\vec r_P}{\partial q_2}\delta q_2$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial q_1}\vec e_{0x} = \vec e_{0x} \qquad = -l\sin q_2\,\vec e_{0x} + l\cos q_2\,\vec e_{0y}$$

$$\rightarrow \delta\vec r_P = \vec e_{0x}\,\delta q_1 + \left(-l\sin q_2\,\vec e_{0x} + l\cos q_2\,\vec e_{0y}\right)\delta q_2$$

$$^{0}(\delta\vec r_P) = \begin{pmatrix}\delta q_1 - l\sin q_2\,\delta q_2\\ l\cos q_2\,\delta q_2\\ 0\end{pmatrix}$$

Generalisierte Kräfte. Virtuelle Verrückung und Virtuelle Arbeit



$$\left(W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Def: virtuelle Arbeit} \\ W_{virt,\vec{F}} = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_P\end{array}}$$

$$\rightarrow \delta \vec{r}_P = \vec{e}_{0x}\, \delta q_1 + \left(-l \sin q_2\, \vec{e}_{0x} + l \cos q_2\, \vec{e}_{0y}\right) \delta q_2$$

$${}^{0}(\delta \vec{r}_P) = \begin{pmatrix} \delta q_1 - l \sin q_2\, \delta q_2 \\ l \cos q_2\, \delta q_2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{virtuelle Verrückung}$$

$$\vec{e}_{0x} \cdot \vec{e}_{0y} = 0$$

Bsp: $\vec{F} = F\, \vec{e}_{0x}$

$$W_{virt,\vec{F}} = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_P = F\, \vec{e}_{0x} \cdot (\delta q_1 - l \sin q_2\, \delta q_2)\, \vec{e}_0$$

$$\vec{e}_{0x} \cdot \vec{e}_{0x} = 1$$

$[W_{virt}] = Nm$

$$= F\, \delta q_1 - F\, \underbrace{l \sin q_2}_{\text{Weg}}\, \underbrace{\delta q_2}_{\text{Winkel}}$$

$$= (\ F\ )\, \delta q_1 + (-F \cdot l \cdot \sin q_2)\, \delta q_2$$

$\rightarrow [\delta q_2] = 1$

$\rightarrow [F] = N \quad [\delta q_1] = m$

$\rightarrow [(\ )] = Nm$

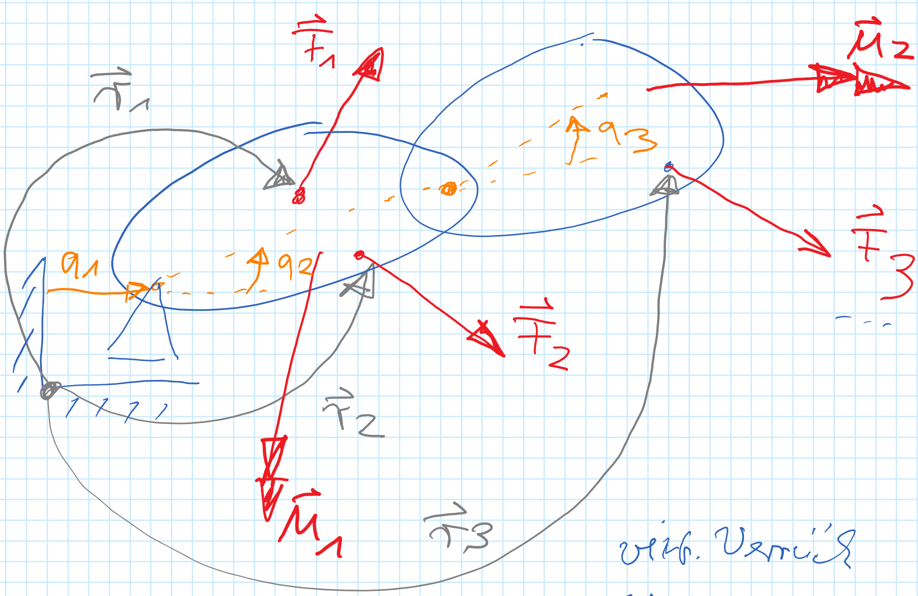
Generalisierte Kräfte. Virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte

Beh: $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \dfrac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_i}$

Bew: $\dot{\vec{r}}(q_i) = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\underbrace{\left(\dfrac{\partial q_i}{\partial t}\right)}_{=\dot{q}_i} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \left(\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i$

$$\boxed{\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}}$$

$$\rightarrow \boxed{\delta \vec{r} = \sum \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\delta q_i = \sum \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i}$$



$\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_3$ eing

$\vec{M}_k$ freien Moment am Körper k eing

$$W_{virt,eing} = \sum_j \vec{F}_{eing\,j} \cdot \underbrace{\delta \vec{r}_j}_{\text{virt. Verrück}} + \sum_k \underbrace{\vec{M}_{eing,k}}_{\text{freie Momente}} \cdot \delta \vec{\varphi}_k$$

$\delta\vec{\varphi}_k$ ← virt. Verdrehung des k-ten Körpers

$$\delta \vec{r}_j = \sum_i \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}\delta q_i = \sum \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i$$

$$\delta \vec{\varphi}_k = \sum \frac{\partial \vec{\omega}_k}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i$$

$$W_{virt,eing} = \dots = (\dots)\,\delta q_1 + (\dots)\,\delta q_2 + \dots + (\dots)\,\delta q_N$$

$$W_{virt,emp} = \ldots = \underbrace{(\ \ldots\ )}_{=:Q_1}\delta q_1 + \underbrace{(\ \ldots\ )}_{=Q_2}\delta q_2 + \ldots + \underbrace{(\ \ldots\ )}_{=Q_N}\delta q_N$$

Zusammenfassung Lagrangesche Gleichungen 2. Art

1 Lagrangefunktion

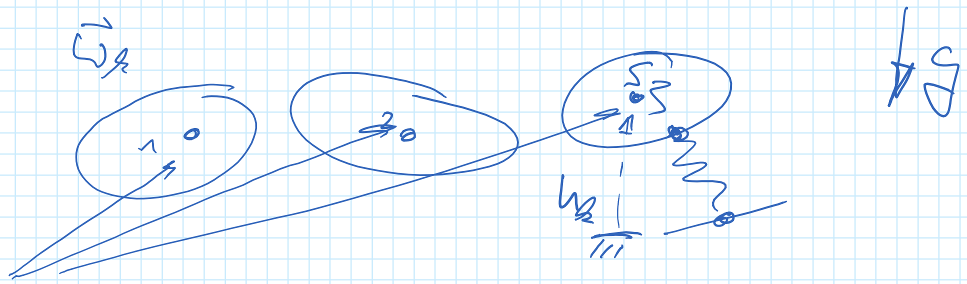
Kinetische Gesamtenergie T eines Systems mit N Minimalkoordinaten hat stets die Form

$T = T(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t)$ oder kurz $T = T(q_i, \dot{q}_i, t)$ (i=1,…,N)

Die im System gespeicherte **potenzielle Energie** V hat, ebenfalls nach Summation, stets die Form (ab nun nur Kurzform)

$V = V(q_i, t)$ Potenziale sind nie geschwindigkeitsabhängig.

Def.: ***Lagrangefunktion*** $L(q_i, \dot{q}_i, t) := T(q_i, \dot{q}_i, t) - V(q_i, t)$



Generalisierte Kraft

Eingeprägte Kräfte und Momente, die nicht im Potenzial berücksichtigt werden können, bewirken eine ***generalisierte Kraft*** Q_i auf die generalisierte Koordinaten q_i, die anhand des Terms für die virtuelle Arbeit dieser Kräfte bestimmt werden

freie Momente

$$W_{\text{virt,enp}} = \sum_{\text{Kraftangriffspunkt } j} \vec{F}_{\text{enp},j} \cdot \delta\vec{r}_j + \sum_{\text{Körper } k} \vec{M}_{\text{enp},k} \cdot \delta\vec{\varphi}_k \overset{!}{=} Q_1 \delta q_1 + \dots + Q_N \delta q_N$$

$$(\dots)\delta q_1 + (\dots)\delta q_2 + \dots + (\dots)\delta q_N$$

$\hat{=} Q_1$ $\quad \hat{=} Q_2$ $\quad Q_N$

$\delta\vec{r}_j = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial\dot{\vec{r}}_j}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i$ bzw. $\delta\vec{r}_j = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial\dot{\vec{r}}_j}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i$ die virt. Verschiebung des Angriffspunkts der j-ten eingeprägten Kraft $\vec{F}_{\text{enp},j}$.

$0 \cdot \delta q_5$

$\hat{=} Q_5 = 0$

mit zugehöriger virtueller Verdrehung

$$\delta\vec{\varphi}_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial\vec{\omega}_k}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i \text{ des k-ten Körpers,}$$

wobei $\vec{\omega}_k(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t)$ dessen absolute Winkelgeschwindigkeit des k-ten Körpers sei.

Bewegungsgleichungen (Lagrange'sche Gleichungen)

i-te Bewegungsgleichung für $i = 1, 2, \ldots, N$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \text{ mit Lagrangefunktion } L = L(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, t)$$

$L = T - V$

$W_{virt,eing} = Q_1 \delta q_1 + \ldots + Q_N \delta q_N$