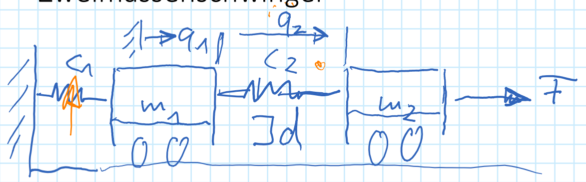
U11.4: Lagrangesche Gleichungen 2. Art, weitere Beispiele

Quellen:
[Woe] = [7]
Woernle, C. *Mehrkörpersysteme.* Berlin : Springer, 2011.

Die vorlesungsbegleitenden Videos sind ein Teil des Online Lernkonzepts, das innerhalb einer geschlossenen Lernumgebung passwortgeschützt den Kursteilnehmern zur Verfügung gestellt wird. Eine Weitergabe der bereitgestellten Inhalte ist nicht erlaubt.

Zweimassenschwinger



Federn sind entspannt für $q_1 = q_2 = 0$

ges: 2 Beweg.-Glg in q_1, q_2 mittels Lagr. Glg.

1.) Lagrangefunktion $L(q_1, q_2, \dot q_1, \dot q_2, t) = T(q_i, \dot q_i, t) - V(q_i, t)$

Kin. Energie T: „$\frac{1}{2} m v^2$"
└ Abs.-geschw.

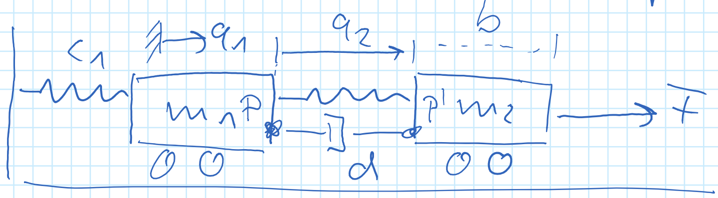
$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot q_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot q_1 + \dot q_2)^2$$

Körper 1 Körper 2

$$V = \frac{1}{2} c_1 q_1^2 + \frac{1}{2} c_2 q_2^2$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m_1 \dot q_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot q_1 + \dot q_2)^2 - \frac{1}{2} c_1 q_1^2 - \frac{1}{2} c_2 q_2^2}$$

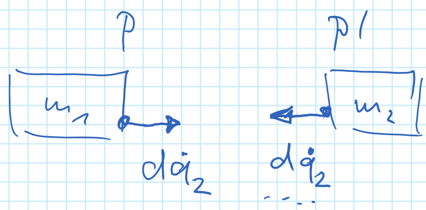
2.) Virtuelle Arbeit → ... → gen. Kräfte Q_1, Q_2



$$\vec r_F = (q_1 + q_2 + b)\, \vec e_{0x}$$ (b = const, $\vec e_{0x}$ = const)

$$\delta \vec r_F = (\delta q_1 + \delta q_2)\, \vec e_{0x}$$

$$W_{v,F} = F \vec e_{0x} \cdot \delta \vec r_F = F(\delta q_1 + \delta q_2)\, \underbrace{\vec e_{0x} \cdot \vec e_{0x}}_{1} = F(\delta q_1 + \delta q_2)$$



$$W_{v,d} = d\dot q_2 \vec e_{0x} \cdot \overbrace{\delta q_1 \vec e_{0x}}^{\delta \vec r_P} + (-d\dot q_2)\vec e_{0x} \cdot (\delta q_1 + \delta q_2)\vec e_{0x} = -d\dot q_2\, \delta q_2$$

$$W_v = W_{v,F} + W_{v,d} = F\delta q_1 + F\delta q_2 - d\dot q_2\, \delta q_2 = (F)\,\delta q_1 + (F - d\dot q_2)\,\delta q_2$$

$$= \underbrace{(\quad F \quad)}_{=Q_1}\delta q_1 + \underbrace{(F - d\dot{q}_2)}_{=Q_2}\delta q_2$$

Lagrange $\qquad Q_1 = F \,, \quad Q_2 = F - d\dot{q}_2$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - \frac{1}{2} c_1 q_1^2 - \frac{1}{2} c_2 q_2^2$$

$i=1$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)^{\cdot} = \left(m_1 \dot{q}_1 + m_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\right)^{\cdot}$$

$$= m_1 \ddot{q}_1 + m_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q_1} = +c_1 q_1$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{q}_1 + m_2 \ddot{q}_2 + c_1 q_1 = Q_1 = F \qquad \text{Bew. 1}$$

$i=2$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - \frac{1}{2} c_1 q_1^2 - \frac{1}{2} c_2 q_2^2$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)^{\cdot} = \left(m_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\right)^{\cdot} = m_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q_2} = +c_2 q_2$$

$$m_2 \ddot{q}_1 + m_2 \ddot{q}_2 + c_2 q_2 = Q_2 = F - d\dot{q}_2 \qquad \text{Bew. 2}$$

$$(m_1+m_2)\ddot{q}_1 + m_2\ddot{q}_2 + c_1 q_1 = F \quad \text{①}$$
$$m_2\ddot{q}_1 + m_2\ddot{q}_2 + d\dot{q}_2 + c_2 q_2 = F \quad \text{②}$$

Sgpf. lin. DGL m. konst. Koeff, inhomogen

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} ; \quad \dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} ; \quad \ddot{q} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix}$$

$F = \underline{K}$ = Steifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} m_1+m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ F \end{pmatrix}$$

$\underline{M}$ = Massenmatrix

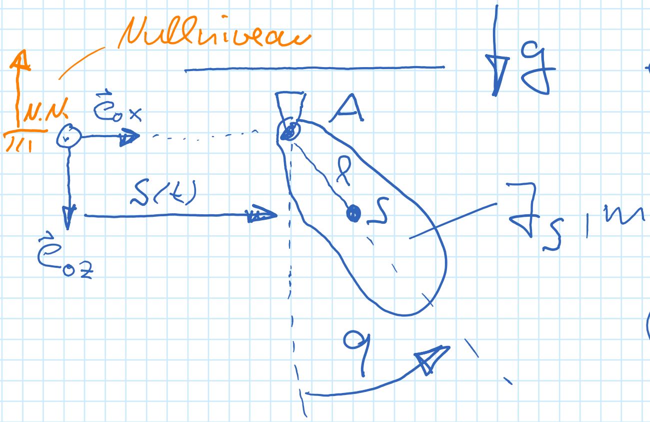
$\underline{D}$ = Dämpfungsmatrix

$\underline{P}(t)$

$$\underline{M}\ddot{q} + \underline{D}\dot{q} + \underline{K}q = \underline{P}(t)$$

2gf. EMS: $m\ddot{q} + d\dot{q} + cq = F(t)$

Physikalisches Pendel mit Weganregung



Geg: Masse m, Massenträgh. bzgl Schwerpkt S J_S, Abstand l, Erdbeschl. g
Vorgegebener Aktorweg $s(t)$

Ges: Beweg. glg in q

1.) Lagrange Fkt: $L = T - V$

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}_S \cdot \vec{v}_S + \frac{1}{2} J_S \dot{q}^2 \qquad \vec{v}_S = \dot{\vec{r}}_S \quad ; \vec{r}_S \hat{=} \text{Vektor zum Schwerpkt.}$$

$${}^0\vec{r}_S = \begin{pmatrix} s + l \sin q \\ 0 \\ l \cos q \end{pmatrix} \rightarrow {}^0\vec{v}_S = \frac{d}{dt}\left({}^0\vec{r}_S\right) = \begin{pmatrix} \dot{s} + \dot{q}\, l \cos q \\ 0 \\ -\dot{q}\, l \sin q \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_S \cdot \vec{v}_S = {}^0\vec{v}_S^{\,T}\, \vec{v}_S = (\dot{s} + \dot{q}\, l \cos q)^2 + (\dot{q}\, l \sin q)^2$$
$$= \dot{s}^2 + 2 \dot{q}\, l \cos q\, \dot{s} + \underbrace{\dot{q}^2 l^2 \cos^2 q + \dot{q}^2 l^2 \sin^2 q}_{\dot{q}^2 l^2} \qquad (\sin^2 x + \cos^2 x = 1)$$

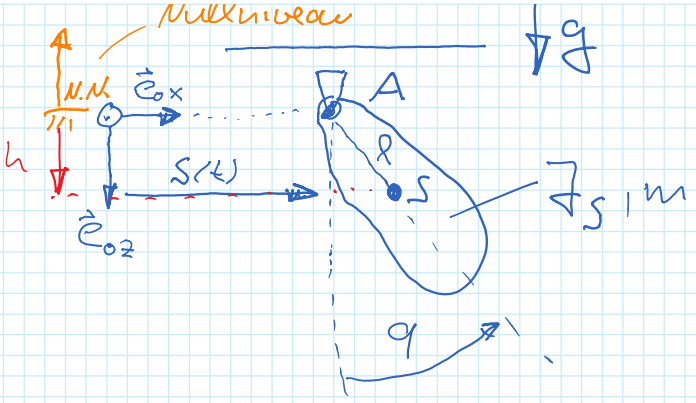
$$\rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + m \dot{q} \dot{s}\, l \cos q + \frac{1}{2}\left(J_S + m l^2\right) \dot{q}^2} = T(q, \dot{q}, t)$$

Potenzial V:

Hier nur Gravitationspotenzial

Ges: Höhe des Schwerpunkts über Nullniveau

$h = - l \cos q$



$h = -l \cos q$

└ negativ, da unter N.N.

$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^{\cdot}$ ( )$^{\cdot}$

Bewg. glg.

→ nichtlin. Bewg. glg eines physikalischen Pendels

$(J_s + ml^2)\ddot{q} + mgl \sin q = 0$

J_A (vgl. Satz v. Steiner)

11) Linearisierte Bew.gl.g für $|\varphi| \ll 1$

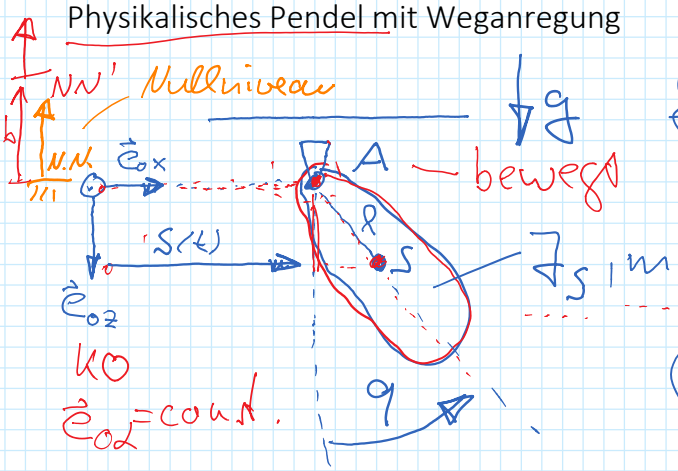
$\rightarrow \sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$

$(J_S + ml^2)\ddot{\varphi} + mgl\varphi = -ml\ddot{s}$; $s(t)$ vorgegeben

Eigenkreisfrequenz „$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$" für $m\ddot{q} + cq = 0$

hier $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J_S + ml^2}}$

Physikalisches Pendel mit Weganregung



Gg: Masse m, Massenträgh. bzgl Schwerpkt S J_S, Abstand l, Erdbeschl. g
Vorgegebener Aktorweg s(t)

Ges: Bewg. glg in q

1.) Lagrange Gl.: $L = T - V$ — für ebene Bewg.

kin. Energie

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}_S \cdot \vec{v}_S + \frac{1}{2} J_S \dot{q}^2$$

rot.

$\vec{v}_S = \dot{\vec{r}}_S$; $\vec{r}_S$ = Vektor zum Schwerpkt.

transl.

$$^0\vec{r}_S = \begin{pmatrix} s + l\sin q \\ 0 \\ l\cos q \end{pmatrix} \rightarrow {}^0\vec{v}_S = \frac{d}{dt}\left({}^0\vec{r}_S\right)$$

Translation

$$= \begin{pmatrix} \dot{s} + \dot{q} l \cos q \\ 0 \\ -\dot{q} l \sin q \end{pmatrix}$$

$\frac{d}{dt}\sin(t^2) \approx 2t\cos t^2$

$\frac{d}{dt}(\sin q(t)) = \dot{q}\cos q$

Kettenregel → Einheiten prüfen

$$\vec{v}_S \cdot \vec{v}_S = {}^0\vec{v}_S^T \, {}^0\vec{v}_S = (\dot{s} + \dot{q} l \cos q)^2 + (\dot{q} l \sin q)^2$$

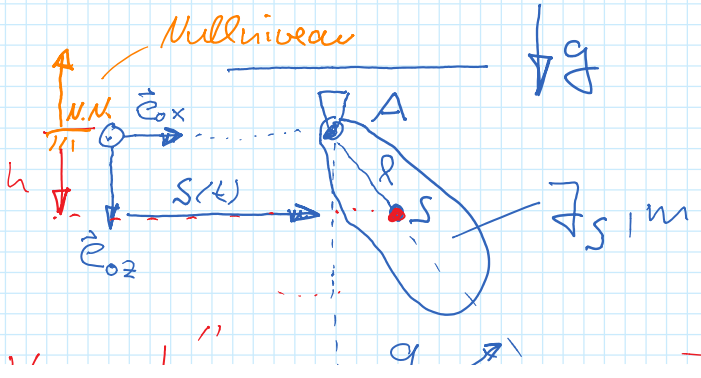
$$= \dot{s}^2 + 2\dot{q} l \cos q \dot{s} + \dot{q}^2 l^2 \cos^2 q + \dot{q}^2 l^2 \sin^2 q$$

$\dot{q} l^2$ ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)

$$\rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + m \dot{q} \dot{s} l \cos q + \frac{1}{2}\left(J_S + m l^2\right)\dot{q}^2 = T(q, \dot{q}, t)}$$

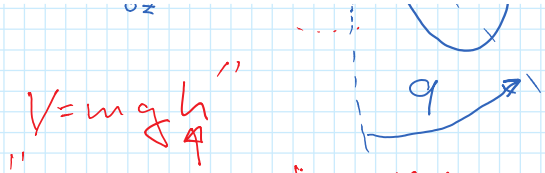
Potenzial V: Hier nur Gravitationspotenzial

ges: Höhe des Schwerpunkts über Nullniveau



$$\boxed{h = \ominus l \cos q}$$

negativ, da unter N.N.



unter N.N.

$$\rightarrow \boxed{V = -mgl\cos q}$$

$$\rightarrow \boxed{L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + m\dot{q}\dot{s}l\cos q + \frac{1}{2}(J_S + ml^2)\dot{q}^2 + mgl\cos q}$$

- Ges. Kräfte: Hier $Q = 0$, da keine exp. Kräfte/Momente
- Lagrangesche Gls:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + m\dot{q}\dot{s}l\cos q + \frac{1}{2}(J_S + ml^2)\dot{q}^2 + mgl\cos q$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)^{\cdot} = \left(m\dot{s}l\cos q + (J_S + ml^2)\dot{q}\right)^{\cdot} \quad (q(t))$$

$$= m\ddot{s}l\cos q - ml\dot{s}\dot{q}\sin q + (J_S + ml^2)\ddot{q}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q} = +m\dot{q}\dot{s}l\sin q + mgl\sin q$$

$$\boxed{(J_S + ml^2)\ddot{q} + m\ddot{s}l\cos q + mgl\sin q = 0}$$ Beweg. Gls

Sonderfälle

1) Unbeschleunigter Aufhängepunkt A: $\ddot{s} = 0$ (z.B. $s = \text{const.}$)
→ nichtlin. Beweg. gls eines physikalischen Pendels

$$(J_S + ml^2)\ddot{q} + mgl\sin q = 0$$

$J_S + ml^2 = J_A$ (vgl. Satz v. Steiner)

II) Linearisierte Beweg. gls für $|q| \ll 1$
→ $\sin q \approx q$, $\cos q \approx 1$

11) Linearisierte BWG für $|\varphi| \ll 1$

$\rightarrow \sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$

$\rightarrow (J_S + ml^2)\ddot{\varphi} + mgl\varphi = -ml\ddot{s}$; $s(t)$ vorgegeben

Eigenkreisfrequenz „$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$" für $m\ddot{q} + cq = 0$

hier $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J_S + ml^2}}$